نثبت المتطابقة:

4/ $\forall d_1, d_2, d_3 \in Der A \; ; \; [d_1,[d_2,d_3]]$

$$[d_1,[d_2,d_3]] + [d_2,[d_3,d_1]] + [d_3,[d_1,d_2]] = 0$$

$$[d_1,[d_2,d_3]] = d_1[d_2,d_3] - [d_2,d_3]d_1$$

$$= d_1(d_2d_3 - d_3d_2) - (d_2d_3 - d_3d_2)d_1$$

$$= d_1d_2d_3 - d_1d_3d_2 - d_2d_3d_1 + d_3d_2d_1$$

$$[d_2,[d_3,d_1]] = d_2[d_3,d_1] - [d_3,d_1]d_2$$

$$= d_2(d_3d_1 - d_1d_3) - (d_3d_1 - d_1d_3)d_2$$

$$= d_2d_3d_1 - d_2d_1d_3 - d_3d_1d_2 + d_1d_3d_2$$

$$[d_3,[d_1,d_2]] = d_3[d_1,d_2] - [d_1,d_2]d_3$$

$$= d_3(d_1d_2 - d_2d_1) - (d_1d_2 - d_2d_1)d_3$$

$$= d_3d_1d_2 - d_3d_2d_1 - d_1d_2d_3 + d_2d_1d_3$$

بحسب الجمع تتحقق الشرط

إذن Der A تشكل جبر لي

الموضوع:

مبرهنة: كل جبر تجميعي على حلقة تبديلية وواحدية R هو جبر لي

البرهان:

ليكن A جبراً فوق الحلقة R

. إذن A مودول فوق الحلقة R.

. نعرف على A عملية ضرب:

$$[\,,\,] : A \times A \longrightarrow A$$
$$(x, y) \longmapsto [x, y]$$
$$[x, y] = xy - yx$$

1) $\forall x \in A \,;\, [x, x] = xx - xx = 0$

2) $\forall x, y, z \in A \,;\, [x, (y+z)] = x(y+z) - (y+z)x$

$= xy + xz - yx - zx = xy - yx + xz - zx$

$= [x, y] + [x, z]$

وبنفس الطريقة نبرهن أن

$[x+y, z] = [x, z] + [y, z]$

3) $\forall \alpha \in R \,;\, \alpha[x, y] = \alpha(xy - yx)$

$= \alpha(xy) - \alpha(yx) = (\alpha x)y - y\alpha x = [\alpha x, y]$

وبنفس الطريقة نبرهن أن

$\alpha[x, y] = [x, \alpha y]$

4) $\forall\, x, y, z \in A$; ~~x [y, z]~~

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

$$[x,[y,z]] = x[y,z] - [y,z]x = x(yz-zy) - (yz-zy)x$$

$$= xyz - xzy - yzx + zyx$$

$$[y,[z,x]] = y[z,x] - [z,x]y = y(zx-xz) - (zx-xz)y$$

$$= yzx - yxz - zxy + xzy$$

$$[z,[x,y]] = z[x,y] - [x,y]z = z(xy-yx) - (xy-yx)z$$

$$= zxy - zyx - xyz + yxz$$

* تعريف

ليكن A جبر لي فوق حلقة R ، نسمي تطبيق الاشتقاق

$$d_a : A \longrightarrow A \qquad \forall a \in A$$

المعرف بالشكل:

$$\forall x \in A ;\; d_a(x) = [a, x]$$

تطبيق اشتقاق داخلي على A

نرمز لمجموعة تطبيقات الاشتقاقات الداخلية على A

بالرمز $Inn(A)$

ينتج من التعريف مباشرة

$$\phi \neq Inn(A) \subseteq Der(A)$$

الموضوع: / /

مبرهنة: لتكن A جبر لي فوق الحقل R ، العلاقة:

$$\psi : A \longrightarrow Der(A)$$

المعرفة بالشكل الآتي: $\forall a \in A : \psi(a) = d_a$

تشاكل جبور لي.

البرهان:

• إن ψ ذضيت لأنه $\forall a,b \in A$ وإذا كان $a=b$

فإن $\forall x \in A : [a,x] = [b,x]$

وبالتالي $d_a(x) = d_b(x)$

$$\Rightarrow d_a = d_b$$

$$\psi(a) = \psi(b)$$

•

$$\psi(a+b) = d_{a+b}$$

$\forall a+b \in A : d_{a+b} : A \longrightarrow A$

$\forall x \in A \quad , d_{a+b}(x) = [a+b, x]$

$$= [a,x] + [b,x] = d_a x + d_b x = (d_a + d_b)x$$

$$\Rightarrow d_{a+b} = d_a + d_b$$

$$\psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b)$$

إذاً ψ تشاكل زمري

$\forall \alpha \in R \; ; \; \psi(\alpha a) = d_{\alpha a}$

$\forall x \in A \; ; \; d_{\alpha a}(x) = [\alpha a, x] = \alpha [a,x] = \alpha d_a(x)$

$$= (\alpha d_a)(x)$$

$$d_{\alpha a} = \alpha d_a$$

$$\psi(\alpha a) = \alpha \psi(a)$$

- $\psi([a,b]) = d_{[a,b]}$

$\forall x \in A; \quad d_{[a,b]}(x) = [[a,b],x] =$

$[x,[a,b]] + [a,[b,x]] + [b,[x,a]]$

$[[a,b],x] = [a,[b,x]] + [b,[x,a]]$

$= [[x,a],b] + [a,[b,x]]$

$= [[a,x],b] + [a,[b,x]]$

$= [d_a(x),b] + [a,d_b(x)]$

$= d_a(d_b(x)) - [b,d_a(x)]$

$= d_a d_b(x) - d_b(d_a(x))$

$= d_a d_b(x) - d_b d_a(x)$

$= (d_a \cdot d_b - d_b d_a)(x) = [d_a, d_b](x)$

ومنه $d_{[a,b]}(x) = [d_a, d_b](x)$

$d_{[a,b]} = [d_a, d_b]$

$\psi([a,b]) = d_{[a,b]} = [d_a, d_b] = [\psi(a), \psi(b)]$

وهو المطلوب

الموضوع: $\forall x \in A,\ d_a(x) = [a, x] = 0$

جبور لي الجزئية:

لتكن A جبر لي فوق الحلقة R و B مجموعة جزئية وغير خالية من A، نقول أن B جبر لي جزئي في A إذا حقق الشروط:

1- $(B, +)$ موديول جزئي من الموديول $(A, +)$

2- $\forall a, b \in B,\ [a, b] \in B$

+ يتضح من التعاريف مباشرة أن كل من الصفر $\{0\}$ و A هي جبور لي الجزئية في A.

تمهيدية: لتكن A جبر لي فوق الحلقة R، B جبر جزئي في A، المجموعة

$$N(B) = \{a ;\ a \in A ;\ d_a(B) \subseteq B\}$$
$$\forall b \in B ; [a, b] \in B$$

تشكل جبر لي جزئي في A

البرهان:

1) $N(B) \neq \emptyset$ لأن $0 \in A ;\ d_0(B) \in B$

$\Rightarrow 0 \in N(B) \subseteq A$

2) $d_{\alpha a + \beta b}(B) \subseteq B$; $\forall \alpha, \beta \in R,\ \forall a, b \in N(B)$

$\alpha a + \beta b$

$\forall y \in B ;\ d_{\alpha a + \beta b}(y) = [\alpha a + \beta b, y]$

$= [\alpha a, y] + [\beta b, y] = \alpha [a, y] + \beta [b, y] \in B$

$\in B$ $\in B$ لأن B موديول

$\Rightarrow$

ومنه ينتج أن $\alpha a + \beta b \in N(B)$ أي أن $N(B)$ موديول جزئي

3) $\forall a, b \in N(B),\ [a, b] \in N(B)$

$\forall y \in B ; \; d_{[a,b]}(y) = [[a,b],y]$

لدينا

$[y,[a,b]] + [a,[b,y]] + [b,[y,a]] = 0$

$[[a,b],y] = [a,[b,y]] + [b,[y,a]]$

$d_{[a,b]}(y) = [[a,b],y] = [a, \underbrace{d_b(y)}_{\in B}] - [b, \underbrace{d_a(y)}_{\in B}]$

$= d_a(d_b(y)) - d_b(\underbrace{d_a(y)}_{\in B}) \in B$

$[a,b] \in N(B)$

مما سبق نجد أن $N(B)$ جبر لي جزئي في A

* تعريف: ليكن A جبر لي فوق حلقة R ولنفرض أن B جبر لي جزئي في A نسمي [illegible] حسب الدرس الأخير

أي $N(B) = \{a : a \in A ; \; d_a(B) \subseteq B\}$

جبر لي جزئي في A نسمي جبر لي الجزئي $N(B)$ ناظم B في A

تعريف: ليكن A جبر لي فوق الحلقة R و I مجموعة جزئية وحيدية في A

نقول أن I مثالياً في A إذا حقق الشرطان:

1- I موديول جزئي في A

2- $\forall a \in A ; \; d_a(I) \subseteq I$

$\forall a \in A, \forall x \in I ; \; [a,x] \in I$

* **مبرهنة:** لتكن A جبر لي فوق الحلقة R ، إن مجموعة تطبيقات الاشتقاق الداخلي المعرفة على A وهي $Inn(A)$ تشكل مثالاً في $Der(A)$ جبر لي.

البرهان:

- واضح أن $\phi \neq Inn(A) \subseteq Der(A)$
- لنبرهن على أن $Inn(A)$ مودول جزئي في $Der A$

$\forall \beta, \alpha \in R \; ; \; \forall d_a, d_b \in Inn(A) \; ; \; a, b \in A$

ولنبرهن أن: $\alpha d_a + \beta d_b \in Inn(A)$

لدينا

$\alpha d_a + \beta d_b \in Der(A)$ من تعريف اشتقاق

$\forall x \in A \; ; \; (\alpha d_a + \beta d_b)x$

$= (\alpha d_a)(x) + (\beta d_b)(x) = \alpha d_a x + \beta d_b(x)$

$=$ ~~$d_a \alpha x + d_b \beta x$~~ $= \alpha[a, x] + \beta[b, x]$

$= [\alpha a, x] + [\beta b, x] = [\alpha a + \beta b, x] = d_{\alpha a + \beta b}(x)$ ، $\alpha a + \beta b \in A$

$(\alpha d_a + \beta d_b) = d_{\alpha a + \beta b}$

$Inn(A)$ مودول جزئي في $Der A$

$\forall D \in Der(A) \; ; \; d_a \in Inn(A) \; ; \; a \in A$

$[D, d_a] = ?$

ان $[D, d_a] \in Der A$

$\forall x \in A \; ; \; [D, d_a](x) = (D d_a - d_a D)(x)$

$= (D d_a)(x) - (d_a D)(x) = D(d_a(x)) - d_a(\underbrace{D(x)}_{A})$

$D([a,x]) - d_a(D(x)) = [D(a),x] + [a,D(x)] - d_a(D(x))$

$= [D(a),x] + d_a(D(x)) - d_a(D(x)) = [\underbrace{D(a)}_{\in A},x] = d_{D(a)}(x)$

$\Rightarrow [D, d_a] = d_{D(a)} \in Inn(A)$

مما سبق نجد أن $InnA$ مثالي في $Der A$

انتهى

Oscar